國立金門技術學院 97 學年度第 2 學期四技日間部轉學考試**答案卷**

系別／年級：營建工程系二年級

科　　目：微積分

評分欄

1. 求極限 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

解答：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$
$$\because \lim_{x\to 0}\frac{simx}{x}=1 \quad \& \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1 \quad \therefore \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

2. 求過點(1 , 1)之函數 $f(x)=\sqrt{x}$ 其切線方程式

解答：$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f^{'}(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} \quad \therefore m=\frac{1}{2}$

點(1 , 1)之切線方程式為 $(y-1)=\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

3. 求證 $\frac{d}{dx}[\tan x]=\sec^2 x$

解答：

$$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x\frac{d}{dx}\sin x-\sin x\frac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\times\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

4. 求導函數 $h(x)=(3x-2x^2)(5+4x)$

$$h(x)=(3x-2x^2)(5+4x)\Rightarrow h^{'}(x)=(3x-2x^2)\frac{d}{dx}[5+4x]+(5+4x)\frac{d}{dx}[3x-2x^2]$$

解答：$=(3x-2x^2)(4)+(5+4x)(3-4x)=(12x-8x^2)+(15-8x-16x^2)$

$-24x^2+4x+15$

5. 求導函數 $y=\dfrac{3(1-\sin x)}{2\cos x}$

解答：
$$y=\frac{3(1-\sin x)}{2\cos x}=\frac{3}{2}\frac{1-\sin x}{\cos x}\Rightarrow y'=\frac{3}{2}\frac{(conx)\frac{d}{dx}[1-\sin x]-(1-\sin x)\frac{d}{dx}[\cos x]}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{3}{2}\frac{\cos x(-\cos x)-(-\sin x+\sin^2 x)}{\cos^2 x}=\frac{3}{2}\frac{-(\cos^2 x+\sin^2 x)+\sin x}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{3}{2}\left(-1+\tan x\sec x-\tan^2 x\right)=\frac{3}{2}\sec x(\tan x-\sec x)$$

6. 求 $3(x^2+y^2)^2=100xy$ 的圖形在點(3 , 1)的斜率

解答：
$$3(x^2+y^2)^2=100xy\Rightarrow\frac{d}{dx}[3(x^2+y^2)^2]=\frac{d}{dx}[100xy]$$
$$3(2)(x^2+y^2)(2x+2y\frac{dy}{dx})=100[x\frac{dy}{dx}+y(1)]$$
$$[12y(x^2+y^2)-100x]\frac{dy}{dx}=100y-12x(x^2+y^2)$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{100y-12x(x^2+y^2)}{-100x+12y(x^2+y^2)}=\frac{25y-3x(x^2+y^2)}{-25x+3y(x^2+y^2)}\to(3,1)\to\frac{13}{9}$$

7. 以 2.5 立方呎/分的速度將汽球充氣，當半徑（r）是 2 呎時，求半徑對時間（t）的變率，其中氣球的體積方程式為 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

解答：$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3\to\dfrac{dV}{dt}=4\pi r^2(\dfrac{dr}{dt})\to\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{1}{4\pi r^2}(\dfrac{dV}{dt})\quad\because\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{5}{2},r=2\quad\therefore\dfrac{dr}{dt}\approx0.05$

8. 決定函數 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ 的圖形凹口向上或是向下的區間

解答：函數微分兩次得到下列各式

$$f(x)'=\frac{(x^2-4)(2x)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-4)^2}=\frac{-10x}{(x^2-4)^2}$$

$$f(x)'' = \frac{(x^2-4)^2(-10)-(-10x)(2)(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4} = \frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

$f(x)''=0$ 無解，但在 $x=\pm 2$ 函數並非連續，所以應該在區間（-∞,-2）、（-2,2）和（2, ∞）上檢測凹性，如下表所示

區間	-∞<x<-2	-2<x<2	2<x<∞
檢測值	x=-3	x=0	x=3
$f(x)''$ 的正負	$f(-3)''>0$	$f(0)''<0$	$f(3)''>0$
結論	凹口向上	凹口向下	凹口向上

9. 求 $f(x)=3x^4-4x^3$ 在閉區間 [-1,2] 上的極值

解答：先將函數微分

$f(x)=3x^4-4x^3$

$f(x)'=12x^3-12x^2$

求所有的 x 使 $f(x)'=0$ 或 $f(x)'$ 不存在，來找出 f 的臨界值

$f(x)'=12x^3-12x^2=0$

$12x^2(x-1)=0$

$x=0,1$（臨界數）

在臨界數和[-1,2]的端點求 f 的函數值，其中最大的是 $f(2)=16$ ，最小的是 $f(1)=-1$

10. 求 $f(x)=x^4-4x^3$ 的反曲點

解答：函數微分兩次得到下式

$f(x)'=4x^3-12x^2$

$f(x)''=12x^2-24x=12x(x-2)$

令 $f(x)''=0$,x=0,x=2 是可能的反曲點，檢測由 x=0,x=2 所決定的區間，可以確定他們都是反曲點，分別爲(0,0)、(2,-16)

下表爲凹性測試結果

區間	-∞<x<0	0<x<2	2<x<∞
檢測值	x=-1	x=1	x=3
$f(x)''$ 的正負	$f(-1)''>0$	$f(1)''<0$	$f(3)''>0$
結論	凹口向上	凹口向下	凹口向上